

Análisis comparativo de las metodologías de estimación del valor en riesgo del mercado de renta variable Colombiano

Comparative analysis in the estimation methods for (value at risk) var in colombian stock market

ALBA-SUAREZ, Miguel Antonio†* & ALBA-ACOSTA, Miguel Angel

Universidad Libre, Facultad de Ciencias Económicas, Administrativas y Contables

ID 1^{er} Autor: *Miguel Antonio, Alba-Suarez* / ORC ID: 4444-0002-1431-2486

ID 1^{er} Coautor: *Miguel Angel, Alba-Acosta* / ORC ID: 0000-0001-7476-5215

Recibido Octubre 27, 2018; Diciembre 19, 2018

Resumen

Este trabajo de investigación ilustra de manera amplia distintas metodologías estadísticas para la obtención de una cuantificación para el Valor en Riesgo (VaR) aplicado al mercado de renta variable colombiano comprendido entre el período 2013-2016, así como la comparación de los mejores métodos para explicar la realidad histórica de este mercado. El desarrollo de esta investigación esta comprendido en una descripción de la teoría y aplicación del Valor en Riesgo donde se realizo en principio un resumen de las diversas técnicas en la estadística paramétrica y no paramétrica como lo son la simulación histórica, paramétrico normal, métodos Montecarlo, modelos EQWT, EWMA y modelos de volatilidad GARCH implementados regularmente en la estimación del VaR. Posteriormente, usando el comportamiento histórico de los activos se realizaron estimaciones con cada una de las metodologías y como resultado final por medio criterios de comparación como el Backtesting se logró dar una descripción precisa a los resultados de los cálculos y se escogió cuál explica mejor la realidad de los activos estudiados.

VaR, Series de Tiempo, Estadística no paramétrica

Abstract

This research work broadly illustrates different statistical methodologies for obtaining a quantification for the Value at Risk (VaR) applied to the Colombian stock market between (2013-2016), as well as the comparison of the best methods to explain the historical reality of this market. The development of this research is comprised in a description of the theory and application of Value at Risk where a summary of the different techniques in parametric and non-parametric statistics such as historical simulation, normal parametric, Monte Carlo methods, was carried out. As well as EQWT, EWMA and GARCH volatility models implemented regularly in the VaR estimation. Subsequently, using the historical behavior of the assets, estimates were made with each one of the methodologies and as a final result using comparisons criteria such as Backtesting an accurate description was given to the results of the calculations and the one chosen to explain better the reality of the assets studied.

VaR, Time series prediction, Non-parametric statistics

Citación: ALBA-SUAREZ, Miguel Antonio & ALBA-ACOSTA, Miguel Angel. Análisis comparativo de las metodologías de estimación del valor en riesgo del mercado de renta variable Colombiano. Revista de Administración y Finanzas.2018. 5-17: 1-21.

*Correspondencia al Autor (Correo Electrónico: miguel.albas@unilibrebog.edu.co)

† Investigador contribuyendo como primer autor.

1. Introducción

Los inversionistas en los mercados financieros están expuestos a una gran cantidad de riesgos, entre ellos el riesgo de mercado. El riesgo de mercado es una de las variables objeto de estudio por parte del mercado, quienes realizan un sinnúmero de operaciones de compra y venta de instrumentos financieros tanto del mercado de renta fija como de renta variable.

El mercado de renta variable es uno de los componentes del mercado de capitales, que en Colombia juega un papel importante representando un monto mensual de negociación superior a los COP 20 billones mensuales, representando aproximadamente un 83% del total negociado en la bolsa de valores de Colombia.

En la actualidad el riesgo de mercado ha ido aumentando no solamente en el mercado de deuda pública, sino que de igual manera, también ha afectado el mercado de renta variable, que su estimación se ha hecho necesaria por los inversionista con el fin de poder efectuar operaciones de cobertura, que coadyuven a disminuir este tipo de contingencia.

El VaR o valor en riesgo es un método que se utiliza para cuantificar el riesgo de mercado, que mide la máxima pérdida esperada que podría registrar un activo en un intervalo de tiempo bajo condiciones normales de mercado frente a un nivel de confianza dado.

Uno de los aspectos de la investigación económica en el área financiera es comprender el riesgo y su impacto en las expectativas de inversión por parte de los agentes económicos. Los agentes económicos buscan mediante los mercados financieros aumentar su rentabilidad con miras a obtener mayores beneficios en su inversión; sin embargo, cuando actúan se encuentran en frente con el riesgo financiero que hace que se mitigue o se desvalorice su inversión en un momento determinado (Torreno, 2008).

La medición del riesgo tiene diferentes metodologías, entre las que se destacan los modelos de simulación histórica y los que realizan la simulación de Montecarlo. Otro grupo, son los modelos de tipo paramétrico que utilizan en su desarrollo, correlaciones, varianzas, desviaciones estándar.

Dentro del conjunto de investigadores y entes académicos que han estudiado el uso del valor en riesgo Arango, Arias, Gómez, Samanca y Velasquez en el 2005 proponen que para la estimación del VAR se haga mediante el proceso de media móvil con ponderación exponencial (EWMA). (Arango, J.P., Arias, M., Gómez, E., Salamanca. D. y Velasquez, D.M, 2005).

Torres y Olarte en el 2009 utilizaron distribuciones marginales para medir el riesgo de un portafolio de acciones, las cuales se tomaron como una medida de incertidumbre (Torres, G. I, y Olarte, A.M, 2009).

Uribe y Ulloa en el 2012 realizaron para diferentes países latinoamericanos la medición del riesgo en donde resaltan que la teoría del VAR no resulta adecuada en momentos en que se encuentra en valores extremos, es decir, que el cálculo tanto en períodos alcistas como bajistas no son indicadores confiables para indicar si un activo financiero está sujeto a altos o bajos niveles de riesgo. (Uribe,J.M., & Ulloa, I.M, 2012).

En cuanto a los primeros estudios a nivel internacional autores como Hoeffding (1948), quien trató de explicitar una función de riesgo que explicara el grado de interdependencia entre las variables, las cuales consideró que eran de carácter aleatorio (Hoeffding, 1948).Sklar (1959), definió que estadísticamente los datos se encuentran en una cópula, la cual se obtiene a través de una función multivariada, al cual se genera mediante distribuciones marginales univariadas. (Sklar, 1959).

Linsmeier y Pearson (1966), mostraron que aplicar el concepto de valor en riesgo en períodos donde exista bajo niveles de volatilidad en los rendimientos y en los precios del mercado se podía incurrir en un error de subestimar el valor en riesgo y llevar a conclusiones equivocadas en la construcción de coberturas para mitigar el riesgo. (Linsmeier, J y Pearson, 1996). Fisher en 1997 realizó el estudio de relaciones de dependencia entre los rendimientos y los precios que se constituyó en el punto de partida para la construcción de distribuciones bivariadas. (Fisher, 1997).

Embrechts, Mcneil y Straumanen el 2002 estudiaron que existe limitaciones en la estimación del coeficiente de correlación lineal como termómetro para medir el grado de dependencia entre las variables. Concluyen que la correlación es simplemente una medida escalar que no identifica estructuras de dependencia, además que los riesgos perfectamente dependientes no tienen correlaciones iguales a 1 o -1. (Embrechts, Mcneil & Straumanen, 2002).

Arnold en el 2006 analizó la estructura de dependencia entre diferentes tipos de cambio para la divisa (USD) encontrando que existe una dependencia entre las monedas europeas mostrando que países que experimentan lejanías de tipo geográfico pueden exhibir valores extremos de dependencia. Con base en este análisis concluyeron que la volatilidad de los datos financieros puede variar semanalmente como consecuencia de algún acontecimiento socio-económico y político que puede tener injerencia en los mercados. (Arnold, 2006)

De acuerdo con lo anterior, se hace necesario conocer las diferentes metodologías de estimación del valor en riesgo, las cuales son utilizadas por la ciencia estadística y financiera para determinar el grado de exposición que presenta un instrumento financiero en el Mercado.

2. Descripción de la metodología

El desarrollo de la presente investigación va a ser de carácter cuantitativo en donde se tomarán los precios de cierre del mercado de renta variable del mercado colombiano a nivel diario para el período 2013-2016.

Para la presente investigación se realizaron el cálculo del valor en riesgo (VaR) vía método paramétrico normal, histórico, modelos EQWT y EWMA y a través de la estimación de volatilidades con el uso de modelos GARCH, así como, estimaciones vía métodos no paramétricos usando simulación histórica y métodos de simulación montecarlo.

Se realizó la comparación de los modelos presentados usando Backtesting.

Modelos de estimación del valor en riesgo aplicables al mercado de renta variable

A continuación, se describen a nivel teórico los modelos de estimación del valor en riesgo aplicables al mercado de renta variable:

Metodologías paramétricas:

Las metodologías paramétricas son aquellas que se caracterizan por suponer una distribución conocida en los rendimientos financieros. En la siguiente tabla se puede encontrar una clasificación para las metodologías paramétrica:

Concepto	Parametrico	Historico	Montecarlo
Número de simulaciones	N/A	Historico a 1,2 o 3 años	10.000
Supuestos en distribución	Normal	Empírica	Marginal <i>t</i> -Student
Pesos en la serie	Pesos exponenciales	Pesos iguales	Pesos exponenciales
Tiempo de vida	26 semanas debido a la volatilidad	Ninguna	26 semanas debido a la volatilidad y 52 por las correlaciones
Horizonte de proyección	Diario y escalado por la raíz del horizonte	Diario y escalado por la raíz del horizonte	Diario y escalado por la raíz del horizonte
Simulaciones no atribuidas a factores de riesgo	N/A	Ningún factor de volatilidad de los modelos de riesgo	Ningún factor de volatilidad de los modelos de riesgo

Tabla 1 Clasificación de las metodologías paramétricas
Fuente: Bloomberg, 2017

Siguiendo los objetivos de este trabajo es necesario hablar de los aspectos paramétricos para la estimación del VaR, teniendo en cuenta esto, es necesaria la utilización de supuestos en cuanto a la distribución de probabilidad que caracteriza los valores posibles de los factores de riesgo asociados al respectivo portafolio de activos financieros. Según (Powell, 2014) Bachelier en 1900 implementando el Teorema del Limite Central logró estandarizar los precios de las acciones de la bolsa de Paris descubriendo que a los cambios excesivos de los montos de los portafolios se lograba obtener una distribución normal. Desde este momento se hizo ese supuesto de distribución para muchos de los comportamientos accionarios.

Los aspectos cruciales en los métodos paramétricos se encuentran en calcular la media y desviación estándar de la distribución normal que se asume con las series propuestas por los datos históricos; al tener estos supuestos de normalidad en los datos solo se procede a calcular el cuantil de la normal correspondiente al nivel de confianza deseado encontrando el valor en riesgo.

VaR paramétrico

El cálculo del VaR a través de metodologías paramétricas sigue un acercamiento tradicional en cuanto a los supuestos de normalidad que siguen los portafolios. Esta metodología utiliza los factores de la matriz de varianzas y covarianzas junto con el modelo proporcionado por los retornos a manera de variables aleatorias con distribución normal.

Las únicas variables necesarias para el cálculo del VaR paramétrico son: la media y desviación estándar del portafolio y el cálculo del valor Z de la normal estándar a un nivel α de confianza seleccionado; el cálculo del VaR se puede ver de la siguiente manera:

$$\widehat{\text{VaR}} = \mu - \sigma \left(Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \right) \quad (1)$$

Donde μ es la media y σ la desviación de los retornos.

En la práctica, este método es bastante riesgoso debido a los supuestos de normalidad ya que, usualmente no se tiene una evidencia observacional para determinar si este hecho es factible. En otro aspecto el VaR paramétrico también impone la restricción de precios lineales, lo que no es adecuado para los valores altamente no lineales (Bloomberg, 2016). Otro problema que posee este método está en la estabilidad de la desviación estándar a lo largo del tiempo por lo que estos valores extremos tienden a subestimar el VaR y pueden generar una exposición a riesgo mayor a la de otras metodologías.

Simulación Monte Carlo

La simulación de Montecarlo es el método más usado después de la simulación histórica para la estimación del valor en riesgo, su uso se enfoca en ver las probabilidades de pérdidas al exceder un valor específico en la distribución supuesta.

Así este método propone que los factores de riesgo de respectivo portafolio de activos financieros son dados a través de una distribución cualquiera (Hao Li, 2014).

$$X_k \sim f(\phi) \quad (2)$$

Con referencia a los supuestos teóricos, estos recaen en la teoría de la probabilidad en la simulación realizando k-escenarios en donde se asume una distribución de probabilidad conocida para los precios y al realizar algunos procesos se obtiene una distribución de probabilidad con la que se estimara el VaR a cierto cuantil, tomando en cuenta que los precios y su parámetro son variables aleatorias con alguna distribución de probabilidad a encontrar.

Por otro lado, esta metodología parte de supuestos sobre los procesos estocásticos inherentes con el movimiento geométrico Browniano para encontrar el método que caracteriza la aleación de la distribución de probabilidad de los precios con la distribución final para la estimación del VaR. (Powell, 2014)

Con la estimación del VaR con el método de Monte Carlo se pueden caracterizar varias distribuciones para las variables de interés y modificarlas en el caso requerido. Una vez hechos los supuestos de distribución es necesario la implementación de los escenarios donde las variables de riesgo del mercado toman diferentes consecuencias de acuerdo al valor de cartera reflejado en estas.

Posteriormente a el resultado de las realizaciones hechas por los k-escenarios se obtiene la distribución de los retornos dados por el portafolio utilizando un proceso estocástico en donde se procede a calcular el cuantil correspondiente al VaR a un nivel α deseado.

En un contraste con la simulación histórica es necesario el uso de datos históricos para realizar la distribución de probabilidad de los retornos, sin embargo, con el método de Monte Carlo se pueden hacer varios juicios sobre la distribución de las variables y traer información adicional para mejorar esta distribución de probabilidad (Powell, 2014). Para realizar la estimación del VaR para un solo activo financiero es necesario de primera mano identificar el proceso estocástico de movimiento Geométrico Browniano que sigue la siguiente terminología:

$$\xi_{t+\Delta t} = \xi_t e^{(\rho\Delta t + \theta_t\sqrt{\Delta t})} \quad (3)$$

Donde ξ_t corresponde a los precios en el tiempo t , $\rho = \mu - \left(\frac{\theta^2}{2}\right)$ es el retorno esperado (μ la media de los retornos esperados y θ^2 su varianza), Δt es el incremento diario y $\theta_t \sim N(0,1)$ la aleatoriedad dada en el tiempo t que permite el cambio continuo en los precios. Reordenado el proceso estocástico de movimiento Geométrico Browniano se puede obtener el siguiente término correspondiente a los retornos:

$$\mathbb{R}_{t+\Delta t} = \ln\left(\frac{\xi_{t+\Delta t}}{\xi_t}\right) = \rho\Delta t + \theta_t\sqrt{\Delta t} \quad (4)$$

A partir de la ecuación anterior es necesaria la implementación de un conjunto de números pseudo-aleatorios provenientes de una distribución normal con media estándar para modelar el proceso estocástico. Esto a través del método congruencial lineal:

$$y_{i+1} = \frac{[(\alpha y_i) \text{ modulo } M]}{M}, \quad (5)$$

Donde α debe ser mayor a 0 y M es el modulo tal que $M > \alpha$; estos números representan las probabilidades de los posibles eventos que pueden ocurrir a cierta cantidad de cambios en los retornos. Al obtener estos números se hace necesaria la transformación de estos en $\theta_t \sim N(0,1)$ y se procede a la implementación del proceso estocástico generándolos un número k de veces, donde el número mínimo de realizaciones depende de cuán precisa quieren ser las estimaciones arrojadas por la simulación $k = \left(\frac{Z_{\alpha}\theta}{A}\right)^2$ donde $A = y - \mu$, y corresponde a los valores simulados y μ la media de la distribución del factor de riesgo. (Powell, 2014).

Finalmente se calcula con el movimiento Geométrico Browniano los valores correspondientes a los retornos $\mathbb{R}_{t+\Delta t}$ para si luego calcular el VaR al nivel $(1 - \alpha)$ de confianza seleccionado donde α usualmente se utiliza al 5%. Para el anterior caso, se contó con un solo activo de un portafolio de inversión, sin embargo, para el cálculo del VaR utilizando un portafolio de inversión conformado por varios activos financieros es necesario el uso de las matrices de varianzas y correlaciones conformada por los distintos activos.

Al tener las respectivas matrices de varianzas y correlación se multiplican de tal forma que quede una matriz varianzas-correlación única; después se multiplica esta por la matriz de varianzas para construir la matriz de varianzas y covarianzas para luego realizar la ponderación respectiva con los precios establecidos. Con la construcción de las matrices anteriores se suma la diagonal de la matriz de varianzas y covarianzas ponderada, con esto se encuentra la desviación estándar del portafolio y así finalmente se calcula el VaR a un nivel $(1 - \alpha)$ de confianza seleccionado utilizando la media de los retornos y su desviación.

Modelos EWMA y EQWT

Los modelos EWMA y EQWT utilizan acercamientos por el método de varianzas-covarianzas en donde se asume que los factores de riesgo que determinan el valor de un portafolio de inversión son distribuidos de manera normal multivariada, lo que implica que el VaR del portafolio es un múltiplo e la desviación estándar.

$$\widehat{\text{VaR}} = -\theta\sqrt{w^T\Sigma w} \quad (6)$$

Donde w es el vector con los pesos del portafolio, Σ la matriz de varianzas-covarianzas y θ un factor de expansión; el método de varianzas y covarianzas supone los retornos de un portafolio \mathcal{R} hecho con m precios, tales que:

$$\mathcal{R} = \sum_{i=1}^m \delta_i R_i \quad (7)$$

Donde δ_i se le conoce como pesos de la serie y a R_i como una variable aleatoria con la matriz de varianzas y covarianzas $\text{Cov}(R_i, R_j) = \sigma_i\sigma_j\xi_{ij}$. Con lo anterior se puede aproximar el VaR de la siguiente manera:

$$\widehat{\text{VaR}} = \sum_{i=1}^m \delta_i \mu_i + \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum_{i=1}^m \delta_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} \delta_i \delta_j \sigma_i \sigma_j \xi_{ij}} \quad (8)$$

Donde μ_i, σ_i^2 corresponden a la media y varianza de los retornos, y se estiman bajo máxima verosimilitud. Por medio de las varianzas y covarianzas de la matriz se estiman las series históricas de los retornos del portafolio usando unidades de media móvil iguales (EQWT) (Gabriela de Raaji & Burkhard Raunig, 2005).

$$\sigma_{ij}^2 = \sum_{t=T-m}^{T-1} \frac{\rho_{it}\rho_{jt}}{m} \quad (9)$$

Donde σ_{ij}^2 denota los elementos de la matriz de varianzas-covarianzas en un tiempo específico, y $\rho_{it}\rho_{jt}$ los retornos.

Esta aproximación histórica EQWT presenta dos pasos:

- El cálculo de la serie de los retornos
- La aplicación de los pesos en las series.

A partir de lo anterior se calculan los retornos ponderados para el periodo de tiempo de la serie y se toma el ratio logarítmico de los precios del portafolio de inversión.

$$R_i = \ln\left(\frac{P_i}{P_{i-1}}\right) \quad (9)$$

Donde los retornos se calculan en el periodo T_i al número de factores de riesgo m . Posteriormente a estos pasos se calcula la varianza de los retornos al cuadrado.

$$\sigma_{ij\{t\}}^2 = \text{VAR} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m R_i^2 \quad (10)$$

Al ser esto una media de los retornos R_i bajo un peso igual se puede escribir el factor de expansión θ .

Como el método EQWT posee siempre el mismo factor de expansión (pesos), en cuanto a la metodología EWMA esta toma en cuenta un mayor peso en esta varianza ocasionando mayor influencia en los retornos. Esta diferencia se da específicamente en que en la metodología EWMA (exponentially weighted moving average) los pesos de las observaciones están dadas bajo un tipo de suavizamiento exponencial. Una forma abreviada de ver esta metodología se puede escribir de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij}^2 = \lambda \sigma_{ij\{t-1\}}^2 + (1 - \lambda) \cdot (\rho_{i\{t-1\}}\rho_{j\{t-1\}}) \quad (11)$$

Donde λ es conocido como un parámetro de suavizamiento y es menor a uno; usualmente este factor de decaimiento toma valores entre 0.95 y 0.99 lo que implica que a factores de decaimiento bajos estos tiendan a datos ponderados por los pesos de mayor manera.

A diferencia de los pesos de la metodología EQWT los pesos en la varianza son diferentes como se expresa a continuación:

$$\mathcal{R} = R_i^2, (R_{i-1})^2, \dots, (R_{i-t})^2 \quad (12)$$

$$W = 1, (1 - \lambda)\lambda, ((1 - \lambda)\lambda)^2, \dots, ((1 - \lambda)\lambda)^t$$

Una diferencia particular entre la metodología entre los dos métodos de estimación es que EQWT no toma en cuenta la dependencia de las variables en el tiempo mientras los modelos EWMA si tienen en cuenta este tipo de comportamiento.

Modelos de volatilidad

La estimación del VaR con supuestos normales evidencia en la aplicación una presencia amplia de sesgo y curtosis, lo que resulta en poca o mucha cobertura de las estimaciones calculadas; por lo que asumir otro tipo de distribuciones y realizar modelos para el manejo de riesgo, resulta en muchas ocasiones un factor óptimo en la estimación oportuna del VaR.

En la práctica es bastante común utilizar modelos auto-regresivos de heterocedasticidad condicional (ARCH) y generalizados (GARCH) ya que estos capturan los movimientos no constantes de la varianza a través del tiempo luchando contra los constantes cambios en la volatilidad. En la práctica los modelos más utilizados de esta clase son los ARCH (1), GARCH (1,1) y EGARCH (1,1); en el caso de este documento se estimará el VaR por medio del modelo GARCH (1,1).

Sea $\phi_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$ los continuos cambios en los retornos desde el periodo empezado en $t - 1$ hasta t , y P_t como el precio de los activos financieros al tiempo t ; la desagregación de ϕ_t se puede escribir de la siguiente manera:

$$\phi_t = E(\phi_t | \rho_{t-1}) + \varepsilon_t \quad (13)$$

Donde ρ_{t-1} corresponde a la información en el tiempo propuesto menos una unidad y ε_t los errores de dicha desagregación considerados como valores no predictivos; el valor esperado para el i -ésimo proceso de auto-regresión se escribe como:

$$E(\phi_t | \rho_{t-1}) = a_0 + \sum_{j=1}^i a_j \phi_{t-j}$$

Los valores no predictivos se pueden escribir como procesos de tipo ARCH $\varepsilon_t = m_t \sigma_t$, donde m_t corresponde a un vector de medias de 0, varianza 1 y la varianza condicional de ε_t es σ_t (Timotheos Angelidis, Alexandros Benos & Stavros Degiannakis, 2003).

Con lo anterior la varianza condicional del modelo ARCH(q) se escribe como:

$$\sigma_t^2 = c_0 + \sum_{i=1}^q c_i \varepsilon_{t-i}^2$$

Donde $c_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, q$ y corresponde a la reacción a los nuevos comportamientos en el mercado; a través de la anterior definición se logra generalizar el modelo ARCH convirtiéndolo en un GARCH(p,q) con la siguiente varianza condicional:

$$\sigma_t^2 = c_0 + \sum_{i=1}^q c_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{d=1}^p \beta_d \sigma_{t-d}^2$$

Donde si $c + \beta < 1$, el proceso se considerara estacionario. Y a su vez β_i sostiene la persistencia de la heterocedasticidad en el tiempo. Para el caso del modelo GARCH (1,1) la varianza condicional se escribe de la siguiente manera:

$$\sigma_{t+1}^2 = c_0 + c_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 \quad (14)$$

El modelo GARCH(p,q) propone una solución bastante buena frente a problemas con la volatilidad y las colas pesadas de la distribución de los retornos por lo que genera estimaciones confiables al influir este factor difícil de modelar y pronosticar.

Por otro lado, este modelo carece de eficiencia por las limitaciones que posee en cuanto a la varianza dependiente de la magnitud y no de los ε_t lo que no es evidente en el comportamiento de los precios donde se encuentra un factor de apalancamiento en donde los activos presentan correlaciones negativas entre ellos y en repercusión logran cambios en la volatilidad (Timotheos Angelidis, Alexandros Benos & Stavros Degiannakis, 2003).

En respuesta a estas limitaciones impuestas por el modelo de tipo GARCH surge el uso de este mismo a manera exponencial EGARCH(p,q) el cual cuenta con la siguiente forma:

$$\ln(\sigma_t^2) = c_0 + \sum_{i=1}^q \left(c_i \left| \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right| + \lambda_i \frac{\varepsilon_{t-i}}{\sigma_{t-i}} \right) + \sum_{d=1}^p \beta_d \ln(\sigma_{t-d}^2)$$

Donde λ_i corresponde a un factor asimétrico.

En la estimación de los parámetros de los modelos ARCH se usa comúnmente máxima verosimilitud asumiendo que la porción estocástica m_t de los errores son independientes e idénticamente distribuidos y el seguimiento de el supuesto de densidad para estos $d(m_t; v)$; con lo anterior la función de log-verosimilitud para el parámetro θ en una muestra de n observaciones se escribe de la siguiente manera:

$$\ln(L(\theta)) = \sum_{t=1}^n \left[\ln(d(m_t(\theta); v)) - \frac{1}{2} \ln \sigma_t^2(\theta) \right]$$

Donde $\ln(L(\theta))$ cambia dependiendo de la función de densidad asumida sobre la porción estocástica m_t .

Siguiendo con el objetivo propuesto en la investigación, se calcula la varianza condicional para el modelo GARCH(p,q) en el tiempo $t + 1$ como:

$$\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 = c_0^{[t]} + \sum_{i=1}^q c_i^{[t]} \varepsilon_{t+1-i}^2 + \sum_{d=1}^p \beta_d^{[t]} \sigma_{t+1-d}^2$$

Una vez obtenida la anterior varianza condicional ya se posee una distribución a seguir por lo que se procede a retroceder y calcular el VaR en el periodo $t + 1$ a un cuantil específico multiplicándolo por la varianza condicional de la siguiente manera:

$$\widehat{\text{VaR}}_{t+1}^\alpha = (1 - \alpha) \hat{\sigma}_{t+1|t}^2 \quad (15)$$

Donde $(1 - \alpha)$ varia dependiendo de la distribución supuesta para los errores.

Metodologías No paramétricas:

Las metodologías no paramétricas son aquellas que se caracterizan por no tener en cuenta el supuesto de distribución conocida en los rendimientos de un activo financiero:

VaR histórico

Esta metodología modela las colas pesadas de los retornos usando la distribución histórica de estos en vez de asumir que se distribuyen normal. En este método la distribución conjunta de los retornos es representada por un panel de retornos diarios históricos a lo largo de varios años para así simular los respectivos rendimientos mediante las colas de la distribución *t*-Student cuyas desviaciones estándar son estimaciones de las volatilidades del portafolio. Para calcular el VaR es necesario organizar descendientemente los retornos históricos y computarlo con un nivel de confianza al retorno menor.

En contraste con el VaR paramétrico el VaR histórico captura las colas pesadas de la distribución de los retornos del portafolio y ofrece flexibilidad para las múltiples técnicas de evaluación de las metodologías; en contraste con el método de Monte Carlo, el VaR histórico tiene la ventaja de no asumir una distribución para los retornos utilizando la distribución histórica de estos por lo que lo convierte en un método fácil de calcular e interpretar. Por otro lado, se puede cuestionar la fidelidad de utilizar la distribución histórica de la distribución de rendimientos futuros debido a las condiciones del mercado ya que actualmente no son como han sido en el pasado. Otro problema de esta metodología está en la limitación en la longitud de los datos proporcionados ya que un pequeño número de escenarios históricos tiende a tener una confianza menor en la estimación del VaR.

Simulación histórica

Actualmente se puede encontrar una gran cantidad de métodos para estimar el valor en riesgo (VaR) de un portafolio, de acuerdo a lo citado en (Hao Li, 2014) en la encuesta hecha por Pernigón & Smith en 2009 se encontró que el 73% de los bancos de estados unidos y Canadá desde 1196 hasta 2005 han usado metodología para la estimación del VaR basadas en la simulación histórica y acercamientos por el método de Montecarlo.

Según (Finger, 2006) las entidades bancarias optan por el uso de la simulación histórica ya que responde bastante bien a las siguientes observaciones:

- Es fácil de explicar.
- Es un método conservador.
- Es libre de supuestos.
- Logra capturar colas pesadas en la distribución.
- Da de manera precisa donde puede haber errores.
- Logra obtener buenos pronósticos.

Debido a todos estos aspectos es lógico que se haya usado bastante este método por los bancos, sin embargo, es necesario ver más allá históricamente para encontrar porque mantienen esto.

Según (Holton, 2015) durante la década de los 90's se generó una migración de intelectuales en el área de las matemáticas y de la física de la industria militar hacia Wall-Street quienes con sus habilidades desarrollaron productos financieros creando estrategias de precios y cobertura; sin embargo, no se tuvo en cuenta en su implementación el impacto que tendría en el manejo de riesgo financiero por lo que se delegaba en la ejecución de las operaciones financieras a personas menos capacitadas en el manejo de este tipo de mediciones.

Ante la situación presentada anteriormente se optó por el uso de la simulación histórica al ser poco sofisticada a nivel matemático y así cada persona podría entender esta metodología de manera sencilla; Debido a esta preferencia los reguladores bancarios aceptaron esta propuesta de cálculo contratando a servicios de consulta en riesgo económicas como J.P Morgan con RiskMetrics y Cs First Boston con PrimeRisk entre otros (Holton, 2015).

En lo que concierne a la simulación histórica consiste en un método de incorporación predictiva del riesgo incluyendo una distribución de probabilidad acumulada de los retornos y su volatilidad, una manera de clasificar a este método está en sus supuestos no paramétricos por el uso asintótico de la distribución empírica teniendo perdida en asumir una distribución ligada a los retornos.

El método de simulación histórica presenta una valoración total en donde se vuelve el tiempo aplicando los pesos actuales de las series temporales de los rendimientos históricos \mathbb{R} . Para el cálculo del VaR mediante esta metodología es necesario el conocimiento de los precios de las variables de mercado, estas se identifican como factores de riesgo de un periodo anterior y también es necesario el cálculo de las variaciones porcentuales diarias de cada uno de los factores de riesgo.

Al tener esto se hace necesario aplicar los retornos diarios al valor corriente de cada activo y realizar su suma, con este número se identifica la variación del valor de la cartera en el día d y a través esto se pueden realizar k cantidad de simulaciones o escenarios para identificar de alguna forma el comportamiento diario del portafolio de inversión.

Lo siguiente consiste en dar orden a los cambios diarios del valor del portafolio ordenados ascendentemente, así, encontrando una función asociada a las variaciones diarias del valor del portafolio.

Finalmente se debe utilizar un nivel de confianza deseado calculando el cuantil $(1 - \alpha)$ de la distribución conformada por las pérdidas y ganancias P/G (Menichini, 2006).

Matemáticamente el VaR a través del método de crecimientos absolutos se obtiene de la siguiente manera:

Se deben aplicar los pesos actuales de la serie actual a la serie de rendimientos de los activos históricos $\mathbb{R}(t, k, \alpha) = \sum_{i=1}^n \rho_i \mathbb{R}_i$, donde $k = 1, 2, \dots, n$.

Donde los pesos actuales ρ_i dependen del tiempo t y \mathbb{R}_i de k , a través de esto construimos un escenario pertinente para la construcción histórica.

Se requiere una valoración construida generalmente por la totalidad de los precios completos incluyendo rendimientos exactos y todas las curvas de crecimiento. Luego de esto es necesaria la obtención de los precios futuros simulando n cantidad de escenarios utilizando los cambios históricos de cada uno de los precios para aplicarlos en los actuales.

$$Ph_i(k) = P_i(0) + \Delta P_i(k) \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (16)$$

Donde el $\Delta P_i(k)$ corresponde a la diferencia de precios entre el día i y el día $i-1$ P/G diaria. Se hace necesaria la creación de una variable hecha como el conjunto de precios correspondiente a los escenarios $T(\alpha, k = 1, \dots, t)$ este conformado como un nuevo valor de la cartera. Luego de esto calculamos un riesgo con volatilidades cambiantes de forma implícita creando un rendimiento conforme a un escenario específico k simulado:

$$\mathbb{R}(t, k, \alpha) = \frac{T(\alpha, k) - T(\alpha, 0)}{T(\alpha, 0)} \quad (17)$$

Donde

$\mathbb{R}(t, k, \alpha)$ es el rendimiento simulado en el día t y $T(\alpha, k)$ corresponde a los escenarios en el día t .

A través de todo esto encontramos la distribución correspondiente a los rendimientos en el k escenario y calculamos el cuantil $(1 - \alpha)$ correspondiente al VaR.

Según (Hao Li, 2014) se puede ver la implementación de este método mediante otra perspectiva, en esta se escribe la serie de los retornos como $\{r_{t+1-i}\}_{i=1}^n$ calculando la siguiente estimación para el VaR como:

$$\widehat{\text{VaR}}_{t+1}^\alpha = \text{Per}\{ \{r_{t+1-i}\}_{i=1}^n, (1 - \alpha)\% \} \quad (18)$$

Donde Per denota al percentil de la distribución de los retornos calculada mediante la simulación y r_t los retornos del portafolio en el día t .

Simulación histórica con crecimientos logarítmicos

Esta metodología es igual a la anterior, pero teniendo en cuenta los rendimientos de forma logarítmica para así calcular el rendimiento de los precios como:

$$\mathbb{R}_*(t, k, \alpha) = \ln \left(\frac{P_i(t)}{P_i(t-1)} \right) \quad (19)$$

Donde $P_i(t)$ corresponde a el precio en el día t y $P_i(t-1)$ el precio en el día $t-1$. Posteriormente a este cálculo es necesario la creación de una serie de tiempo con los escenarios simulados multiplicando los escenarios recientes o actuales con el rendimiento logarítmico de los precios más una unidad.

$$\mathbb{P} = P_i(0) \times [(\mathbb{R}_*(t, k, \alpha) + 1)] \quad (20)$$

Al tener esto se realiza la serie con los rendimientos simulados con los rendimientos de los precios tomando en cuenta las observaciones recientes.

$$\mathbb{R}(t, k, \alpha) = \ln\left(\frac{\mathbb{P}}{P_i(0)}\right) \quad (21)$$

Al ya poseer los rendimientos simulados se calcula el VaR tomando el cuantil $(1 - \alpha)$ con el nivel de confianza seleccionado.

BACKTESTING

La gran cantidad de métodos para estimar el VaR es una razón significativa de porque se debe verificar su desempeño y cuál es la metodología que realmente este reflejando el comportamiento del mercado. El backtesting es un procedimiento estadístico donde las pérdidas y ganancias son comparadas correspondientemente al valor en riesgo estimado.

La investigación hecha por los bancos para medir la fiabilidad de los métodos de estimación del VaR utilizando pruebas retrospectivas se divide en las siguientes tres categorías:

- **Test de cobertura:** Estos evalúan si la frecuencia con la que se dan excepciones donde el modelo propuesto por el VaR no captura con precisión los cambios en la volatilidad y correlación del mercado son consistentes con el cuantil de pérdida que la medida de riesgo trato de reflejar.
- **Test de distribución:** Estos proponen pruebas de bondad y ajuste para las distribuciones de pérdida pronosticadas por la medida de riesgo.
- **Test de independencia:** Estos buscan determinar si hay independencia entre periodos elegidos.

Test de cobertura

Este test se basa en ver el número de excepciones diarias en el que las pérdidas generadas por el portafolio superan los valores estimados por cada VaR, por lo que, si el número de excepciones es menor a un nivel de confianza seleccionado, el modelo sobreestima el riesgo; por otro lado, si el número de excepciones es mayor hay un factor de subestimación en el riesgo.

Sea Q el cuantil de pérdidas asociadas al portafolio; el proceso que implica el exceso de las pérdidas se escribe de la siguiente manera:

$$I_t = \begin{cases} 0 & \text{si la pérdida } P_{t-1} - P_t \leq \text{VaR} \\ 1 & \text{si la pérdida } P_{t-1} - P_t > \text{VaR} \end{cases}$$

Donde I_t es idénticamente distribuida e independiente. Se define la cobertura z como la frecuencia de veces que se excede el VaR como:

$$z^* = E(I_t) \quad (22)$$

Sea Y el número de excedentes como $Y = \sum_{t=0}^q d^t$, donde d corresponde a los datos históricos siendo estas realizaciones de I_t . Y es una variable aleatoria con distribución binomial con parámetros $(q + 1, 1 - z)$.

Al aumentar el número de excedentes se puede aproximar esta distribución binomial a una normal estándar:

$$z = \frac{y - pt}{\sqrt{p(1-p)t}} \sim N(0,1) \quad (23)$$

Donde pt es el número esperado de excedentes y $p(1-p)t$ su varianza. Para el criterio de rechazo si se toma la hipótesis nula como cierta a un nivel α^* de significancia dado; se deben encontrar los valores y_1 y y_2 de tal forma que $P(Y \notin [y_1, y_2]) \leq \alpha^*$. Siguiendo a esto, se establece un criterio para varios intervalos de $[y_1, y_2]$ de tal manera que al observar el VaR en el periodo $t + 1$ y a un número Y de excedentes; si $Y \notin [y_1, y_2]$ se rechaza la estimación del VaR.

Test de cobertura de Kupiec

Este es uno de los test más conocidos con respecto a las tasas de fracaso, este intenta describir si el número de excepciones o excedentes es consistente con el nivel de confianza especificado; este test indica que bajo la siguiente hipótesis nula que el número de excepciones o excedentes sigue una distribución binomial igual a la del test de cobertura.

$$H_0 = \rho = \hat{\rho} = \frac{x}{n} \quad (24)$$

Donde x son las excepciones y n corresponde al número de observaciones; por medio de lo anterior se determinan las diferencias significativas de la tasa de fracaso $\hat{\rho}$ con respecto a ρ . Bajo el test de máxima verosimilitud el estadístico de prueba presenta la siguiente forma:

$$L(\text{TF}) = -2 \ln \left(\frac{(1-\rho)^{n-x} \rho^x}{\left[1 - \frac{x}{n}\right]^{n-x} \left(\frac{x}{n}\right)^x} \right) \quad (25)$$

Donde bajo la hipótesis nula $L(\text{TF}) \sim \chi^2_{(1)}$ por lo que si este estadístico excede $\chi^2_{(1)}$ la hipótesis nula se rechaza y el modelo de estimación para el VaR es ineficiente.

Test TUFF de Kupiec

Este test parte de supuestos iguales a los del test anterior; la diferencia se evidencia en la probabilidad de cada excepción, siendo cada una de estas la inversa del nivel de confianza del VaR. Para este test bajo máxima verosimilitud el estadístico de prueba es el siguiente:

$$L(\text{TUFF}) = -2 \ln \left(\frac{\rho(1-\rho)^{v-x}}{\left[1 - \left(\frac{1}{v}\right)\right]^{v-1} \left(\frac{1}{v}\right)^x} \right) \quad (26)$$

Donde v representa el tiempo que se toma hasta que ocurre la primera excepción en la muestra y el estadístico $L(\text{TUFF}) \sim \chi^2_{(1)}$, por lo que si el estadístico es menor al valor crítico el modelo de estimación es aceptado.

Introducción a los modelos

GARCH

Los modelos autorregresivos condicionalmente heterocedásticos (ARCH) y su generalización (GARCH) poseen el concepto clave respecto a la varianza condicional, esto es, la varianza condicional en el pasado. En los modelos GARCH clásicos, la varianza condicional se puede expresar como una función lineal de los valores pasados al cuadrado de la serie. Esta especificación particular es capaz de capturar los principales hechos estilizados que caracterizan las series financieras. La estructura "lineal" de estos modelos se puede visualizar a través de varias representaciones que serán revisados a continuación.

Un proceso ε_t es llamado un proceso GARCH (p,q) si sus primeros dos momentos condicionales existen y satisfacen lo siguiente:

$$E(\varepsilon_t | \varepsilon_u, u < t) = 0 \quad (27)$$

Existen constantes $\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_q$ y β_1, \dots, β_p tal que

$$\begin{aligned} \text{Var}(\varepsilon_t | \varepsilon_u, u < t) &= \sigma_t^2 \\ &= \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2 \end{aligned}$$

Esta última ecuación se puede escribir de forma más compacta como:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(B) \varepsilon_t^2 + \beta(B) \sigma_t^2 \quad (28)$$

donde B es el operador de rezagos y α, β son polinomios de grado q y p respectivamente. Si $\beta = 0$, tenemos que

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha(B) \varepsilon_t^2 \quad (29)$$

y este proceso se denomina ARCH(q). Por definición, la innovación del proceso ε_t^2 es la variable $v_t = \varepsilon_t^2 + \sigma_t^2$. Sustituyendo en la forma $\text{Var}(\varepsilon_t | \varepsilon_u, u < t)$ las variables σ_{t-j}^2 por $\varepsilon_{t-i}^2 - v_{t-j}$, se obtiene la siguiente representación:

$$\varepsilon_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t-i}^2 + v_t - \sum_{j=1}^p \beta_j v_{t-j} \quad (30)$$

donde $r = \max(p, q)$. Esta ecuación tiene la estructura lineal de un modelo ARIMA, lo que permite un cálculo sencillo en las predicciones lineales. Hay una prueba que detecta la presencia de heterocedasticidad condicional que fue introducida por McLeod que no es más que el estadístico de Ljung-Box para la serie al cuadrado o los residuales al cuadrado de un modelo ARIMA. (McLeod, A.I. & Li, W.K., 1983).

Los modelos GARCH (p, q) capturan de forma adecuada varias características de las series de tiempo financieras, como el agrupamiento de la volatilidad.

Por otro lado, la estructura GARCH presenta algunos inconvenientes de aplicación ya que la variación depende solo de la magnitud y no del signo de ε_t , que es algo que no es adecuado en el comportamiento empírico del mercado de valores, donde un efecto de apalancamiento puede estar presente.

Los estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros se obtienen mediante el algoritmo de maximización numérico propuesto por Marquardt, aunque Bollerslev y Wooldridge proponen un estimador usando la función de quasiverosimilitud que resulta tener una distribución asintóticamente normal y proporciona errores estándar asintóticos que son válidos cuando no hay presencia de normalidad. (Marquardt, 1963).

En resumen, la predicción de la varianza condicional un paso adelante para el modelo GARCH (p, q) es:

$$\hat{\sigma}_{t+1|t}^2 = \omega^{(t)} + \sum_{i=1}^q \alpha_i^t + \varepsilon_{t-i+1}^2 + v_t - \sum_{j=1}^p \beta_j^{(t)} \alpha_{i-j+1}^2 \quad (31)$$

Por lo tanto, es sencillo calcular la predicción un paso adelante del VaR bajo todos los supuestos distribucionales y para observaciones con media cero como:

$$\text{VaR}_{t+1|t} = F(\alpha) \hat{\sigma}_{t+1|t} \quad (32)$$

Donde $F(\alpha)$ corresponde al cuantil (95 % o 99 %) de la distribución asumida y $\hat{\sigma}_{t+1|t}$ corresponde a la predicción de la desviación estándar condicional en el tiempo $t+1$ dada la información hasta el tiempo t .

3. Modelamiento y estimación

Para el cálculo del valor en riesgo se tomaron las acciones que presentan mayor peso presentan en el índice bursátil como se puede visualizar en la siguiente figura:

COLCAP Index	Display	Output	Alert
Colombia COLCAP Index			
24 Members			
Members Historical Summary			
Stats Group by None			
Ticker	Name	Weight (%)	
1) PFBCOLO	CB Bancolombia SA	14.344977	
2) GRUPOSUR	CB Grupo de Inversiones Suramericana	9.012324	
3) ECOPETL	CB Ecopetrol SA	7.777733	

Grafico 1 Miembros de la Bolsa de Valores de Colombia a través del Índice COLCAP

Fuente Bloomberg, 2017

Como se puede observar las acciones que tienen mayor peso en el índice bursátil son: preferencial de Bancolombia, grupo de Inversiones suramericana y Ecopetrol.

Acción preferencial de Bancolombia

La acción preferencial de Bancolombia en los últimos tres años ha presentado un comportamiento mixto como se puede observar en la siguiente figura:

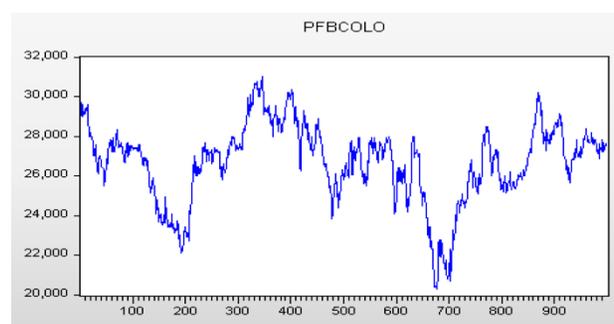


Grafico 2 Comportamiento histórico de la acción preferencial de Bancolombia periodo 2013-2016

Fuente Bloomberg, 2017

De acuerdo con la figura anterior, se establece que no existe ningún tipo de tendencia en la serie por lo que se prosigue a realizar la prueba de dickey fuller aumentada y Phillips perron para determinar si la serie es estacionaria

	t-Statistic	Prob.*
Null Hypothesis: PFBCOLO has a unit root Exogenous: Constant Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=21)		
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.046268	0.0311
Test critical values:		
1% level	-3.436683	
5% level	-2.864225	
10% level	-2.568251	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.		
Null Hypothesis: PFBCOLO has a unit root Exogenous: Constant Bandwidth: 5 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel		
	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-3.147795	0.0235
Test critical values:		
1% level	-3.436683	
5% level	-2.864225	
10% level	-2.568251	
*Mackinnon (1996) one-sided p-values.		

Grafico 3 Pruebas de raíz unitaria preferencial de Bancolombia periodo 2013-2016

Fuente Elaboración Propia

En este caso la serie a una significancia del 5% se demuestra que es estacionaria por lo que se procedió a seleccionar el mejor modelo.

El orden del modelo a utilizar en el caso de esta serie de tiempo al ser un activo ampliamente volátil es un AR(1) con un AIC y BIC del 14.60292 y 14.61274 respectivamente

$$Z_t = 3.708010e^4 + 0.9815381 Z_{t-1} + \epsilon_t \quad (33)$$

Sobre este modelo se realiza la predicción a veinte periodos más ilustrados en la siguiente figura:

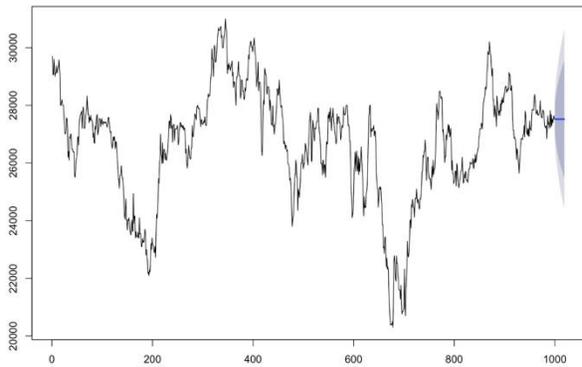


Grafico 4 Forecast from ETS (A, N, N) Bancolombia periodo 2013-2016
Fuente: Cálculos Propios

Continuando con la descripción del activo se realizaron pruebas para determinar la estructura de los residuales y comportamiento de estos.

En este caso se rechaza la hipótesis nula de normalidad para la distribución de los residuales del modelo como se muestra a continuación:

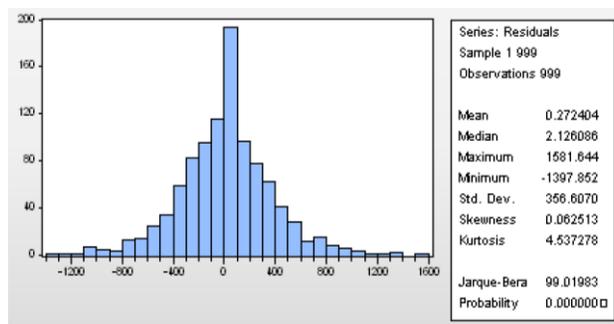


Grafico 5 Prueba de Normalidad Jarque Bera en la acción preferencial de Bancolombia
Fuente: Cálculos Propios

Como último se confirma que existe alta volatilidad en la serie por lo que es necesaria la inclusión del componente de heterocedasticidad al modelo.

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	12.14148	Prob. F(1,996)	0.0005
Obs*R-squared	12.01934	Prob. Chi-Square(1)	0.0005

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 05/18/17 Time: 17:18
Sample (adjusted): 2 999
Included observations: 998 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	113074.5	8528.178	13.25893	0.0000
RESID^2(-1)	0.109755	0.031498	3.484463	0.0005
R-squared	0.012043	Mean dependent var	127030.3	
Adjusted R-squared	0.011052	S.D. dependent var	239180.6	
S.E. of regression	237855.3	Akaike info criterion	27.59871	
Sum squared resid	5.63E+13	Schwarz criterion	27.60855	

Grafico 6 Pruebas de Heterocedasticidad Bancolombia
Fuente: Cálculos Propios

Considerando un nivel de significancia del 5 %, se puede concluir que las estimaciones del coeficiente del modelo de corto plazo del proceso en el modelo completo son significativas. A continuación, se presenta el resultado de la prueba de Ljung-Box para los residuales del modelo identificado.

Q(lag)	Estadístico	p-value
15	13.508	0.5631
20	16.253	0.7008

Tabla 2 Prueba Ljung Box para la acción preferencial de Bancolombia
Fuente: Cálculos Propios

Los resultados presentados en la tabla anterior permiten concluir que no hay correlación serial en los residuales del modelo identificado. Lo anterior indica que el modelo es adecuado para capturar la correlación serial a corto plazo presente en la serie diferenciada.

Seguido a esto se tomaron los residuales del modelo al cuadrado para así encontrar el modelo GARCH más adecuado para capturar la volatilidad en cuyo caso el mejor fue un GARCH(2,1) con un AIC del 2735.364.

Se muestra en la siguiente figura el autocorrelograma (simple y parcial) de la serie de los residuales al cuadrado.

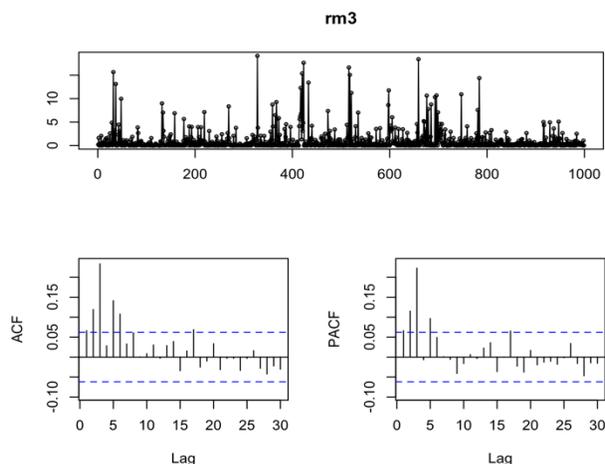


Gráfico 7 Autocorrelograma (simple y parcial) de la serie de los residuales al cuadrado de la acción preferencial de Bancolombia

Fuente: Cálculos Propios

Usando los rezagos que se salen de la banda azul, se procede a evaluar por medio del AIC el mejor modelo GARCH, se crean las bandas de confianza y se obtiene la siguiente figura:

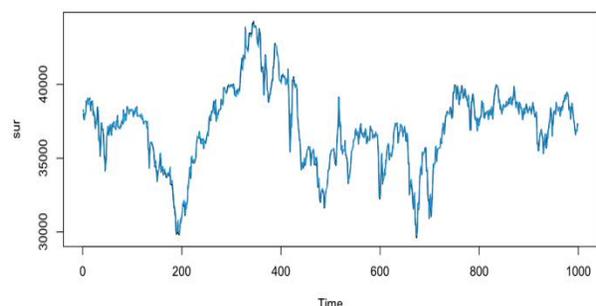


Gráfico 8 Retornos de la serie de la acción preferencial de Bancolombia con intervalos de confianza del modelo GARCH

Fuente: Cálculos Propios

A continuación, se muestra la comparación de las metodologías del VaR para esta serie: De la anterior tabla podemos afirmar que, con un nivel de significancia del 5 % ninguna metodología logra estimar de forma adecuada el Valor en Riesgo, pero definitivamente la aproximación dada por el modelo GARCH resulta ser mejor.

Metodología	VaR	p-value Backtesting
GARCH	-0.08675715	0
Histórico	-0.022	1.584949e-34
Normal	-0.023	1.499641e-26
EWMA	0.025	1.154352e-19
EQWT	-0.023	1.499641e-26

Tabla 3 Análisis comparativo de la estimación del valor en riesgo y Backtesting en la acción preferencial de Bancolombia

Fuente: Cálculos propios

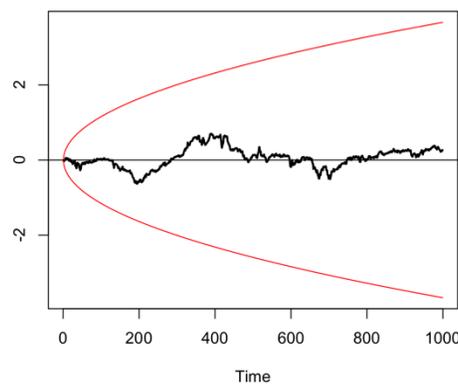


Gráfico 9 Prueba CUSUM-Estabilidad estructural Residuales en la acción preferencial de Bancolombia

Fuente: Cálculos Propios

El analisis de los retornos en la estimación no paramétrica presento los siguientes resultados:

Metodología	VaR
Simulación histórica	-0.0339751732565822
Montecarlo	-0,001005206

Tabla 4 Estimación del Valor en Riesgo acción preferencial de Bancolombia bajo simulación histórica y montecarlo

Fuente: Cálculos Propios

Acción Grupo de Inversiones Suramericana

La acción Grupo de Inversiones suramericana en los últimos tres años ha presentado un comportamiento mixto como se puede observar en la siguiente figura:

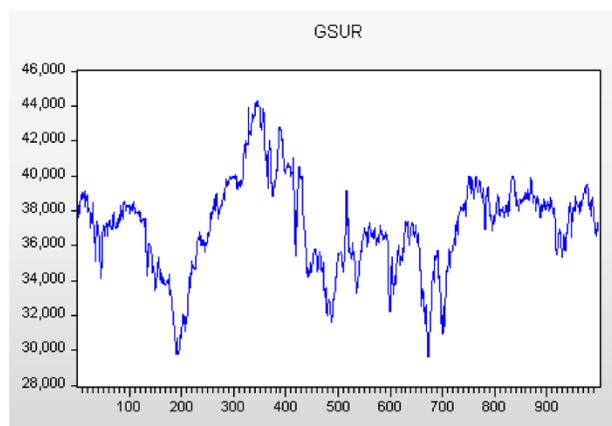


Gráfico 10 Comportamiento histórico de la acción Grupo de Inversiones Suramericana periodo 2013-2016

Fuente Bloomberg, 2017

Como se observa en el gráfico 10, el comportamiento de la acción es mixto; por lo tanto, se establece que no existe ningún tipo de tendencia en la serie por lo que se prosigue a realizar la prueba de dickey fuller aumentada y Phillips perron para determinar si la serie es estacionaria.

Null Hypothesis: GSUR has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 9 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-3.048126	0.0310
Test critical values:		
1% level	-3.436683	
5% level	-2.864225	
10% level	-2.568251	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Null Hypothesis: GSUR has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 1 (Automatic - based on SIC, maxlag=21)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-3.273128	0.0164
Test critical values:		
1% level	-3.436689	
5% level	-2.864227	
10% level	-2.568253	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Grafico 11 Pruebas de raíz unitaria Grupo de Inversiones Suramericana periodo 2013-2016

Fuente *Elaboración Propia*

En este caso la serie a una significancia del 5% se demuestra que es estacionaria por lo que se procedió a seleccionar el mejor modelo.

A continuación, se ilustra la implementación del procedimiento para la identificación y estimación de un modelo adecuado para la serie de Grupo Sura. Primero, se evalúa la fluctuación empírica de la serie original, en la siguiente grafica se puede observar que, a un nivel de significancia del 5 % se rechaza la hipótesis nula, en la que se supone que no hay cambios estructurales en el proceso.

Siguiente con el análisis, se determinó el orden del modelo a utilizar, en el caso de esta serie de tiempo al ser un activo ampliamente volátil se determinó que el modelo más adecuado para explicar el comportamiento de la acción es un ARMA(1,1) con un AIC y BIC del 15.28059 y 15.29532 respectivamente.

$$Z_t = 3.707984e^4 + 0.97771 Z_{t-1} + 0.1102\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \quad (34)$$

Sobre este modelo se realiza la predicción a veinte periodos más ilustrados en la siguiente figura:

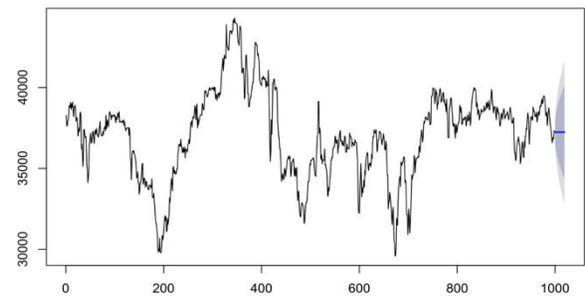


Grafico 12 Forecast from ETS (A, N, N) Grupo de Inversiones Suramericana 2013-2016

Fuente: *Cálculos Propios*

Continuando con la descripción del activo se realizaron pruebas para determinar la estructura de los residuales y comportamiento de estos. En este caso se rechaza la hipótesis nula de normalidad para la distribución de los residuales del modelo como se muestra a continuación:

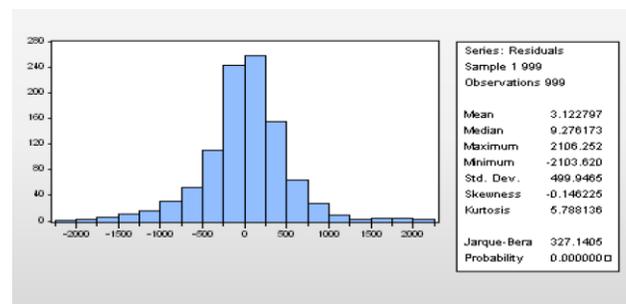


Grafico 13 Prueba de Normalidad Jarque Bera en la acción Grupo de Inversiones Suramericana

Fuente: *Cálculos Propios*

Como último se confirma que existe alta volatilidad en la serie por lo que es necesaria la inclusión del componente de heterocedasticidad al modelo.

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	8.158238	Prob. F(1,996)	0.0044
Obs*R-squared	8.108205	Prob. Chi-Square(1)	0.0044

Test Equation:
Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 05/18/17 Time: 14:00
Sample (adjusted): 2 999
Included observations: 998 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	227168.7	18962.99	11.97959	0.0000
RESID^2(-1)	0.090144	0.031560	2.856263	0.0044

R-squared	0.008124	Mean dependent var	249698.7
Adjusted R-squared	0.007129	S.D. dependent var	546728.4
S.E. of regression	544776.2	Akaike info criterion	29.25614
Sum squared resid	2.96E+14	Schwarz criterion	29.26597

Grafico 14 Pruebas de Heterocedasticidad Grupo de Inversiones Suramericana

Fuente: *Cálculos Propios*

Considerando un nivel de significancia del 5 %, se puede concluir que las estimaciones del coeficiente del modelo de corto plazo del proceso en el modelo completo son significativas. A continuación, se presenta el resultado de la prueba de Ljung-Box para los residuales del modelo identificado.

Q(lag)	Estadístico	p-value
10	12.481	0.2542
15	13.508	0.5631
20	16.253	0.7008

Tabla 5 Prueba Ljung Box para la acción Grupo de Inversiones Suramericana
Fuente: Cálculos Propios

Los resultados presentados en la tabla anterior permiten concluir que no hay correlación serial en los residuales del modelo identificado. Lo anterior indica que el modelo es adecuado para capturar la correlación serial a corto plazo presente en la serie diferenciada. Seguido a esto se tomaron los residuales del modelo al cuadrado para así encontrar el modelo GARCH más adecuado para capturar la volatilidad en cuyo caso el mejor fue un GARCH(2,1) con un AIC del 2743.565.

Se muestra en la siguiente figura el autocorrelograma (simple y parcial) de la serie de los residuales al cuadrado:

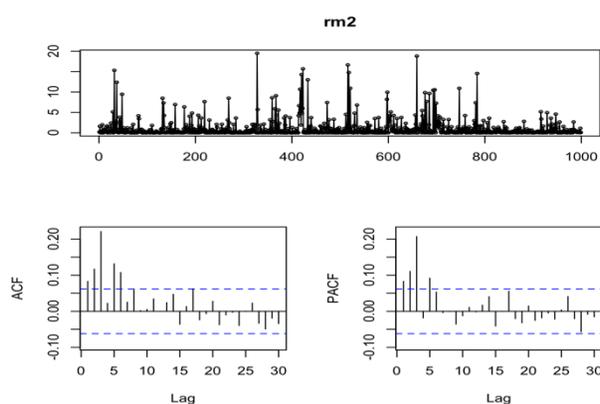


Gráfico 15 Autocorrelograma (simple y parcial) de la serie de los residuales al cuadrado de la acción Grupo de Inversiones Suramericana
Fuente: Cálculos Propios

Usando los rezagos que se salen de la banda azul, se procede a evaluar por medio del AIC el mejor modelo GARCH, se crean las bandas de confianza y se obtiene la siguiente figura

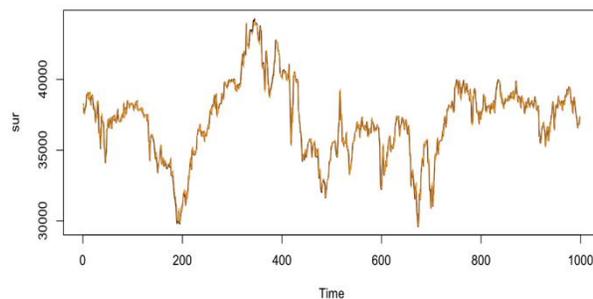


Gráfico 16 Serie de la acción Grupo de Inversiones Suramericana con intervalos de confianza del modelo GARCH
Fuente: Cálculos Propios

A continuación, se muestra la comparación de las metodologías del VaR para esta serie:

Metodología	VaR	p-value Backtesting
GARCH	-0.06791347	0.002561677
Histórico	-0.025	7.284806e-14
Normal	-0.023	1.154352e-19
EWMA	-0.023	1.154352e-19
EQWT	-0.023	1.154352e-19

Tabla 6 Análisis comparativo de la estimación del valor en riesgo y Backtesting en la acción grupo de Inversiones suramericana
Fuente: Cálculos Propios

De la anterior tabla podemos afirmar que, con un nivel de significancia del 5 % las metodologías que mejor estiman el valor en riesgo son la normal, EWMA y EQWT.

Se muestra en la siguiente figura la fluctuación empírica para los residuales del modelo, donde se puede ver que no se rechaza la hipótesis de estabilidad estructural de la serie

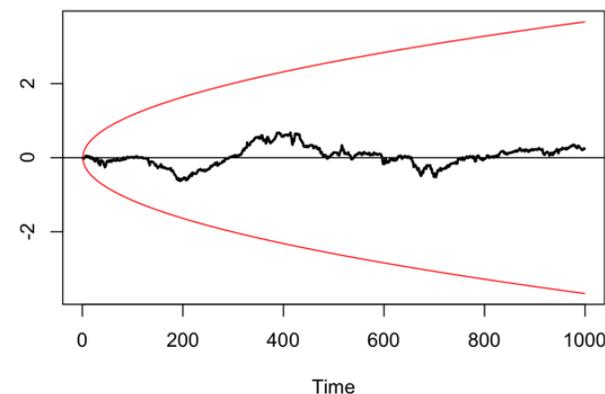


Gráfico 17 Prueba CUSUM-Estabilidad estructural Residuales en la acción del Grupo de Inversiones Suramericana
Fuente: Cálculos Propios

La estimación del valor en riesgo no paramétrico proveniente del análisis de los retornos se muestra a continuación con el caso de simulación histórica y métodos de Montecarlo.

Metodología	VaR
Simulación histórica	-0.0392498571497239
Montecarlo	-0,001057486

Tabla 7 Estimación del Valor en Riesgo bajo la Metodología Simulación Histórica y Montecarlo en la acción del Grupo de Inversiones Suramericana

Fuente: Cálculos propios

Acción Ecopetrol

La acción de Ecopetrol en los últimos tres años ha presentado un comportamiento hacia la como se puede observar en la siguiente figura:

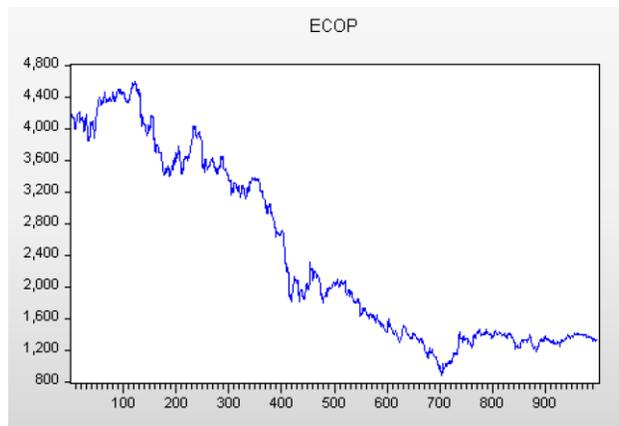


Gráfico 18 Comportamiento histórico de la acción Grupo de Ecopetrol periodo 2013-2016

Fuente: Bloomberg, 2017

Seguido a esto se determinaron las pruebas de dickey-fuller y Phillips Perron para determinar el comportamiento estacionario de la serie como se puede observar a continuación:

Null Hypothesis: ECOP has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 10 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-1.212524	0.6710
Test critical values:		
1% level	-3.436683	
5% level	-2.864225	
10% level	-2.568251	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Null Hypothesis: ECOP has a unit root
Exogenous: Constant
Lag Length: 0 (Automatic - based on SIC, maxlag=21)

	t-Statistic	Prob.*
Augmented Dickey-Fuller test statistic	-1.212440	0.6710
Test critical values:		
1% level	-3.436683	
5% level	-2.864225	
10% level	-2.568251	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Gráfico 19 Pruebas de raíz unitaria de la acción Grupo de Ecopetrol periodo 2013-2016

Fuente Elaboración Propia

Se determinó que la serie no es estacionaria por lo que requiere una primera diferencia; al realizar esto se obtuvo estacionaridad en la serie como lo arroja el gráfico de línea y la siguiente prueba de Phillips perron

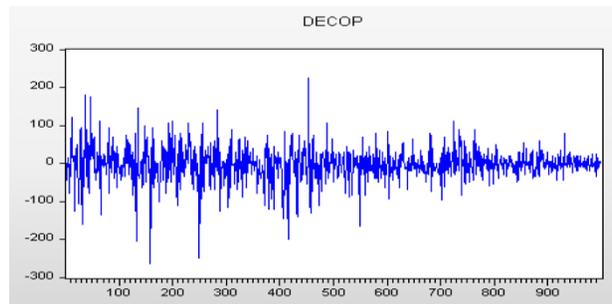


Gráfico 20 Comportamiento diferencial acción de Ecopetrol

Fuente Elaboración Propia

Null Hypothesis: DECOP has a unit root
Exogenous: Constant
Bandwidth: 11 (Newey-West automatic) using Bartlett kernel

	Adj. t-Stat	Prob.*
Phillips-Perron test statistic	-30.21073	0.0000
Test critical values:		
1% level	-3.436689	
5% level	-2.864227	
10% level	-2.568253	

*Mackinnon (1996) one-sided p-values.

Gráfico 21 Prueba raíz unitaria en del comportamiento diferencial acción de Ecopetrol

Fuente Elaboración Propia

Siguiente a esto se determinó el orden del modelo a utilizar, en el caso de esta serie de tiempo al ser un activo ampliamente volátil se encontró que el modelo más adecuado para explicar el comportamiento de la acción es un ARIMA(1,1,0) con un AIC y BIC del 10.43756 y 10.44739 respectivamente.

$$Z_t = 0.04676381 Z_{t-1} + \epsilon_t \tag{35}$$

Sobre este modelo se realiza la predicción a veinte periodos más ilustrados en la siguiente figura:

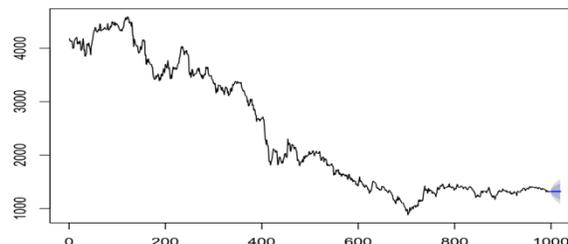


Gráfico 21 Forecasts from ETS(M, N, N) acción de Ecopetrol

Fuente Elaboración Propia

Continuando con la descripción del activo se realizaron pruebas para determinar la estructura de los residuales y el comportamiento de estos. En este caso se rechaza la hipótesis nula de normalidad para la distribución de los residuales del modelo como se muestra a continuación:

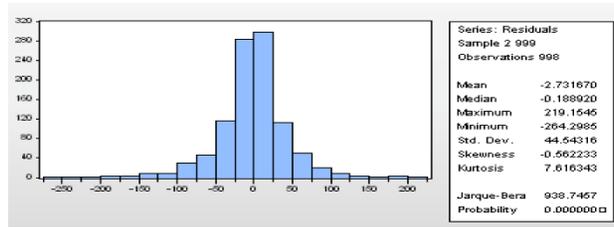


Grafico 22 Prueba de Normalidad Jarque Bera en la acción de Ecopetrol
Fuente: Cálculos Propios

Como último se confirma que existe alta volatilidad en la serie por lo que es necesaria la inclusión del componente de heterocedasticidad al modelo.

Heteroskedasticity Test: ARCH

F-statistic	15.06106	Prob. F(1,995)	0.0001
Obs*R-squared	14.86631	Prob. Chi-Square(1)	0.0001

Test Equation:

Dependent Variable: RESID^2
Method: Least Squares
Date: 05/18/17 Time: 13:19
Sample (adjusted): 3 999
Included observations: 997 after adjustments

Variable	Coefficient	Std. Error	t-Statistic	Prob.
C	1746.327	174.0232	10.03502	0.0000
RESID^2(-1)	0.122120	0.031467	3.880858	0.0001

R-squared	0.014911	Mean dependent var	1989.536
Adjusted R-squared	0.013921	S.D. dependent var	5162.226
S.E. of regression	5126.169	Akaike info criterion	19.92411
Sum squared resid	2.61E+10	Schwarz criterion	19.93395

Grafico 23 Pruebas de Heterocedasticidad acción de Ecopetrol
Fuente: Cálculos Propios

Considerando un nivel de significancia del 5 %, se puede concluir que las estimaciones del coeficiente del modelo de corto plazo del proceso en el modelo completo son significativas.

A continuación, se presenta el resultado de la prueba de Ljung-Box para los residuales del modelo identificado

Q(lag)	Estadístico	p-value
10	13.791	0.1827
15	19.265	0.202
20	26.75	0.1424

Tabla 8 Prueba Ljung Box para la acción de Ecopetrol
Fuente: Cálculos Propios

Los resultados presentados en la tabla anterior permiten concluir que no hay correlación serial en los residuales del modelo identificado. Lo anterior indica que el modelo es adecuado para capturar la correlación serial a corto plazo presente en la serie diferenciada.

Seguido a esto se tomaron los residuales del modelo al cuadrado para así encontrar el modelo GARCH más adecuado para capturar la volatilidad en cuyo caso el mejor fue un GARCH(1,1) con un AIC del 2604.717. Se muestra en la siguiente figura el autocorrelograma (simple y parcial) de la serie de los residuales al cuadrado

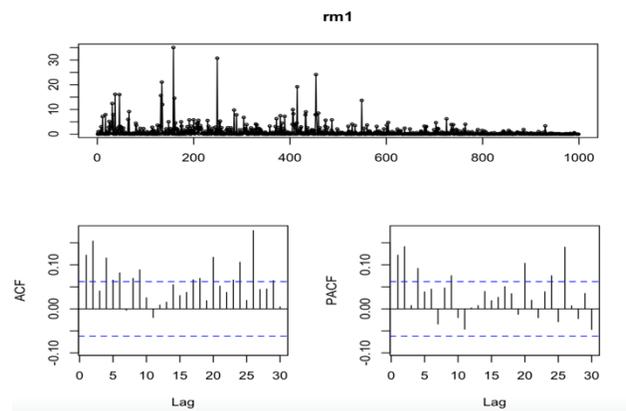


Grafico 24 Autocorrelograma (simple y parcial) de la serie de los residuales al cuadrado de la acción de Ecopetrol
Fuente: Cálculos Propios

Usando los rezagos que se salen de la banda azul, se procede a evaluar por medio del AIC el mejor modelo GARCH, se crean las bandas de confianza y se obtiene la siguiente figura:

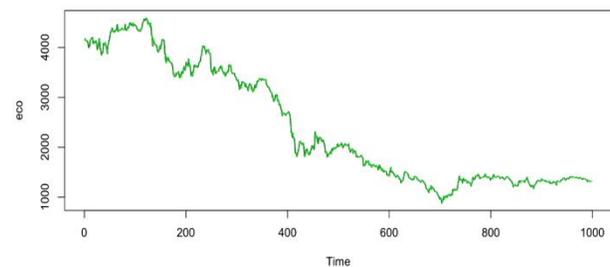


Grafico 25 Retornos de la serie de la acción de Ecopetrol con intervalos de confianza del modelo GARCH
Fuente: Cálculos propios

A continuación, se muestra la comparación de las metodologías del VaR para esta serie:

Metodología	VaR	p-value Backtesting
GARCH	-0.0003733293	0.0000000
Histórico	-0.034	3.254457e-17
Normal	-0.034	3.254457e-17
EWMA	-0.033	1.154352e-19
EQWT	-0.034	3.254457e-17

Tabla 9 Análisis comparativo de la estimación del valor en riesgo y Backtesting en la acción de Ecopetrol
Fuente: Cálculos Propios

Se muestra en la siguiente figura la fluctuación empírica para los residuales del modelo, donde se puede ver que no se rechaza la hipótesis de estabilidad estructural de la serie.

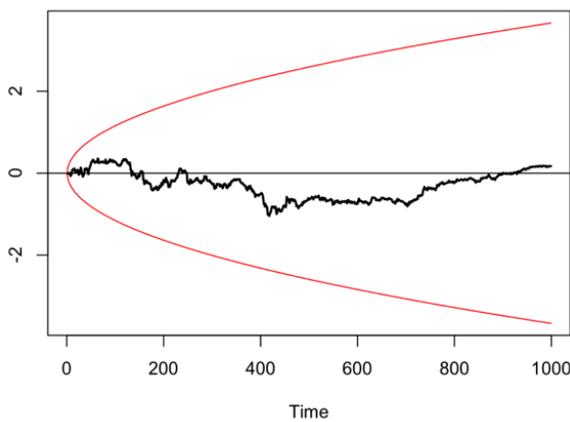


Gráfico 25 Prueba CUSUM-Estabilidad Estructural Residuales en la acción de Ecopetrol
Fuente: Cálculos Propios

Para el caso de simulación histórica y Montecarlo se encontró la siguiente estimación para el valor en riesgo

Metodología	VaR
Simulación histórica	-0.0325541649045392
Montecarlo	-0,001446429

Tabla 10 Estimación del valor en Riesgo bajo simulación histórica y Montecarlo
Fuente: Cálculos Propios

4. Conclusiones y recomendaciones

Se evidencio a lo largo de la investigación que los modelos paramétricos están basados en los parámetros de la distribución de los factores de Riesgo, mientras que los no paramétricos son modelos de simulación o históricos (Ammann & Reich, 2001). A su vez, existen varios métodos para el cálculo de este indicador, donde el supuesto de normalidad es el más importante y el más ideal para las carteras simples.

Cuando se implementa la metodología de VaR histórico, el primer paso es el de identificar los instrumentos en el portafolio para obtener las series de tiempo durante un periodo de tiempo definido, luego, se utilizan las ponderaciones del portafolio para simular retornos hipotéticos que se habrían realizado, suponiendo que la cartera actual se ha mantenido durante el periodo de observación. Esto es una desventaja, ya que el mercado es bastante volátil, por lo que resulta con desventajas a la hora de implementar esta metodología.

Con la metodología EQWT y EWMA, el cálculo del VaR resulta ser bastante sencillo, siempre que se mantenga el supuesto de normalidad, ya que las propiedades matemáticas de la distribución normal estándar permiten una trasladabilidad fácil entre diferentes niveles de confianza y periodos de espera.

En general, el supuesto de normalidad es bastante fuerte y hay que validarlo para aplicar de forma adecuada esta metodología, pero, en general, en las series financieras este supuesto es bastante escaso sin el ajuste de la serie de tiempo, debido a que en muchos de los activos financieros, particularmente en el mercado de renta variable los activos poseen distribuciones con colas pesadas, y los test de normalidad no suelen cumplirse.

En este trabajo se ha mostrado que los retornos no tienen distribución normal, dadas las pruebas de bondad de ajuste implementadas. Además, la presencia de correlación de los mismos determina la presencia de un fenómeno de “ruido negro” en la función de autocorrelación.

Adicionalmente, el supuesto de varianza constante tampoco se puede validar. Con base en todo lo anterior, es muy difícil crear un intervalo de confianza que tenga la menor pérdida posible o, de otra forma, estimar el máximo del x% de los retornos mínimos. Es por esto que, para la estimación del VaR es más adecuado hacer una predicción de la volatilidad, lo que es posible mediante los modelos GARCH.

Finalmente, se hace necesario implementar en futuras investigaciones metodologías no paramétricas o semiparamétricas ya que las paramétricas no permitieron escoger cual es la metodología que mayor explica el comportamiento del Valor en Riesgo en el mercado de renta variable; sin embargo, al realizar el Backtesting se encontró que los modelos GARCH son los que presentan una mejor predicción de la volatilidad.

Esta técnica puede llegar a ser de mejor utilidad ya que no solamente logra retener los cambios incesantes en la varianza sino también el ajuste completo de las series temporales de los activos. Adicional a esto, el uso de estructuras de dependencia como Copulas podría lograr ser una buena alternativa favorable a la estimación del VaR. Reteniendo así la volatilidad de manera más fuerte incluso después de la modelación por modelos GARCH.

5. Referencias

- Arango, J.P., Arias, M., Gómez, E., Salamanca, D. y Velasquez, D.M. (2005). Estimación de los requerimientos de capital por riesgo de mercado. *Reporte de Estabilidad Financiera*, 88-100.
- Arnold, H. (2006). *Dependence Modelling via the copula Method*. Macquarie University Campus.
- Banco de la República. (2016). *Boletín mercado de Deuda pública*. Bogotá.
- Bloomberg. (2016). Portfolio: Value-at-Risk. *PORTFOLIO & RISK ANALYTICS RESEARCH*, 8.
- Bolsa de Valores de Colombia. (2015). *Guía del Mercado de Valores*. Bogotá.
- Box, G.E. & Jenkins, G.M. & Reinsel, G.C. (2008). Time Series Analysis: Forecasting and control. *John Wiley and Sons*.
- Embrechts, Mcneil & Straumanen. (2002). Correlación y dependencia en la Gerencia de Riesgo. *Risk Management*, 176-180.
- Embrechts, P. (2016). VaR-based Risk Management: Sense and (Non-)Sensibility. *RiskLab Department of Mathematics ETH Zurich*, 31.
- Finger, C. (2006). How historical simulation made me lazy. *RiskMetrics Group*, 8.
- Fisher, N. (1997). Cópulas. En: Enciclopedia de la Ciencia Estadística.
- Gabriela de Raaji & Burkhard Raunig. (2005). A Comparison of Value at Risk Approaches and Their Implications for Regulators1). *Financial Market Analysis Division of the Oesterreichische Nationalbank*, 15.
- Hao Li, X. F. (2014). Approaches to VaR. *Stanford University*, 44.
- Hoefding, W. (1948). *A Class of Statistics with Asymptotically Normal Distribution*. *Annals Statistics*.
- Höing, P. E. (2006). Extreme VaR scenarios in higher dimensions. 16.
- Holton, G. (2015). *Value-at-risk*. Obtenido de Value-at-Risk: Theory and practice: value-at-risk.net
- Linsmeier, J y Pearson. (1996). *Medición del Riesgo: Una introducción al valor de riesgo*. Universidad de Illinois.
- Marquardt, D. (1963). An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters. *Journal of the Society for industrial and applied mathematics 11*, 431-441.
- McLeod, A.I. & Li, W.K. (1983). Diagnostic checking ARIMA time series models using squared-residual autocorrelations. *Journal of Time Series Analysis 4*, 269-273.
- Menichini, A. (2006). Value at risk: metodología de administración del riesgo financiero. *Bolsa de comercio de Rosario ARG*.
- MinHacienda. (2016). *Pérfil deuda GNC*. Bogotá. Obtenido de www.minhacienda.gov.co/HomeMinhacienda/faces/oracle/webcenter/portalapp/pages/creditoypudapublicos/Deuda.jspx?_afLoop=73975341224901&_afWindowMode=0&_afWindowId=null#!%40%40%3F_afWindowId%3Dnull%26_afLoop%3D739753412224901%26_afWindowMode%3D0%26_ad

owell, C. &. (2014). *Value-at-Risk (VaR) in Excel*. Australasian Accounting, Business and Finance Journal, article 7 .

Rodríguez Taborda, E. (2002). *Administración del Riesgo*. Alfa Omega.

Sklar, A. (1959). *Fonctions de Repartition a n-dimensions et leur marges*. Paris: Pub, Inst Statist.

Timotheos Angelidis, Alexandros Benos & Stavros Degiannakis. (2003). The Use of GARCH Models in VaR Estimation. *macro.soc.uoc.gr*, 36.

Torreno, A. (2008). *La crisis Financiera Internacional*. Alcalá: Instituto Universitario de Análisis Económico. Recuperado el 13 de Julio de 2015

Torres, G. I, y Olarte, A.M. (2009). Valor en riesgo desde un enfoque de cópulas. *Ad-Minister*, 112-136.

Uribe,J.M., & Ulloa, I.M. (2012). La medición del riesgo en eventos extremos. Una revisión metodológica en contexto. *Lecturas de Economía*, 87-100.